

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 2 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה 1
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 4
4. גזירה סתומה 7
5. כלל השרשרת 9
6. גזירה לוגריתמית 12
7. נגזרת הפונקציה ההפוכה 13

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[4]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 3x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x \\ \text{ד.} & f'(x) = 1 & \text{ה.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 6x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה.} & f'(x) = 8 & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. (4)} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. (5)} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. (6)} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ז.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x)$$

$$\text{א. (7)} \quad f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ג.} \quad f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \\ \text{א. (8)} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ח.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ט.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$\text{א. (9)} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2 גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3 גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- 5 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- 6 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9 נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12 נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(13) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$, $f(1) = -2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------|---------------------|--------|
| | | 40 (1) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -16 (1) | |
| ג. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. | א. $2e+1$ (2) | |
| ג. $g'(x) < 0$ ב. יורדת. | א. -4 (3) | |
| | ד (4) | |
| | $\frac{17}{80}$ (5) | |
| | 36 (6) | |
| | $\frac{8}{9}$ (7) | |
| | 44 (8) | |
| | -2 (9) | |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il